

Jordan pour les nuls

Matteo Abis

webmaster@latinblog.org

4 marzo 2008

Determinare la matrice di Jordan

Data una matrice quadrata $A \in M_{n \times n}(C)$, troviamo le radici del polinomio caratteristico risolvendo $(-1)^n \det(A - x\mathbb{I}) = 0$. Individuiamo poi gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Per non trascinare troppi indici, sia λ un autovalore di molteplicità algebrica r . Il procedimento si ripete poi per ogni autovalore. Si risolve il sistema omogeneo $(A - \lambda)x = 0$. Si trovano r_1 soluzioni indipendenti. In altre parole $\dim_C \ker(A - \lambda) = r_1$. Se $r_1 = r$, la matrice è diagonalizzabile su quell'autovalore e non c'è nessun problema. Se invece $r_1 < r$, si trova $\ker(A - \lambda)^2$, con $r_2 > r_1$ soluzioni linearmente indipendenti, e così via, finché si trovano $r_i = r$ soluzioni indipendenti di $(A - \lambda)^i x = 0$, essendo i il primo esponente per cui questo accade.

Alcuni fatti degni di nota

- r_1 è proprio il numero di blocchi di Jordan relativi all'autovalore λ ;
- r è il numero di volte in cui compare l'autovalore λ sulla diagonale della matrice J ;
- posto $s_1 = r_1, s_2 = r_2 - r_1, \dots, s_k = r_k - r_{k-1}$ è il numero di blocchi di ordine almeno k associati a λ .
- posto $m_1 = s_1 - s_2, \dots, m_k = s_k - s_{k+1}, \dots, m_i = s_i$, è esattamente il numero di blocchi di ordine k associati a λ .
- nella matrice di Jordan ci sono esattamente tanti uno quanti sono gli autovettori "mancanti".

Non dovrebbero esserci ora grossi problemi nel determinare la matrice J .

Trovare la matrice di cambiamento di base

Non è altrettanto semplice trovare la matrice di cambiamento di coordinate P . Per ciascun autovalore λ prendiamo i relativi blocchi di Jordan. Sia $\{v_{N_r,1}, \dots, v_{N_r,r_1}\}$ una base di $\ker(A - \lambda)$, la si completa a una base di $\ker(A - \lambda)^2$ aggiungendo $r_2 - r_1$ vettori indipendenti, poi si passa a $\ker(A - \lambda)^3$ etc. Partiamo poi dal nucleo generato con esponente più alto N_1 . Si trova un vettore $v_{1,1}$ di questo sottospazio tale che sia $(A - \lambda)^{N_1} v_{1,1} = 0 \neq (A - \lambda)^{N_1-1} v_{1,1}$. Poniamo allora $v_{1,2} = (A - \lambda)v_{1,1}$, e così via, fino a v_{1,N_1} . Se non ci sono altri blocchi per λ abbiamo finito, altrimenti esiste $v_{2,1}$ linearmente indipendente da $v_{1,1}, \dots, v_{1,N_1}$ tale che $(A - \lambda)^{N_2} v_{2,1} = 0 \neq (A - \lambda)^{N_2-1} v_{2,1}$ e si ripete lo stesso fino ad esaurire anche questo blocco. Si affiancano poi tutti questi vettori *in ordine inverso*, per trovare una matrice:

$$P_\lambda = (v_{k,N_k} \dots v_{1,1}) \in M_{n \times r}(C)$$

E infine si affiancano tutte le P_λ per ottenere P tale che $AP = PJ$.

Un esempio svolto

Trovare la forma di Jordan della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si trova facilmente ed è $P_\phi(x) = (x-1)^3(x+3)$. Sappiamo che l'autovalore -3 non sarà un problema, e infatti si trova subito che $\ker(A+3) = \langle w = (1, -1, 0, 0)^t \rangle$. L'autovalore 1 è invece più pericoloso, avendo molteplicità algebrica 3 :

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (A - 1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si vede subito che la matrice $A - 1$ ha rango 2 (prima e seconda colonna indipendenti), mentre $(A - 1)^2$ ha rango 1 e nullità 3 , come si voleva. In questo caso è quindi $r_1 = \dim_C \ker(A - 1) = 2$ e quindi ci sono due blocchi di Jordan per l'autovalore 1 . Inoltre $r_2 = 3$, $s_2 = r_2 - r_1 = 1$, $s_1 = r_1 = 2$, $m_1 = s_1 - s_2 = 1$, $m_2 = s_2 = 1$, e questi due ultimi numeri indicano che c'è esattamente un blocco di ordine due e un blocco di ordine uno. Possiamo quindi mettere in fila questi tre blocchi per ottenere:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Si noti che dove si incrociano due blocchi di Jordan, anche relativi allo stesso autovalore, appare uno zero sulla sopradiagonale. Inoltre appare esattamente un uno, e infatti ci mancava un autovettore indipendente per l'autovalore 1 .

Scriviamo anche la matrice di cambiamento di base P . I sottospazi da considerare sono:

$$\ker(A - 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \ker(A - 1)^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Di questi, l'ultimo non appartiene al nucleo di $(A - 1)$. Possiamo quindi prendere $v_1 = e_4$ e $v_2 = (A - 1)v_1 = -4e_3$. Ora ci manca un vettore del nucleo di $(A - 1)$ che non sia combinazione lineare di questi due, e si vede che basta prendere il primo, perché ha prima coordinata diversa da 0 , $v_3 = e_1 - e_4$. Ricordiamo che all'inizio avevamo trovato il vettore w relativo all'autovalore 3 . La matrice cercata è dunque:

$$P = (v_3, v_2, v_1, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$